$\boldsymbol{Calcolo\ combinatorio}$

$P(A\ U\ B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A) = \frac{\#\ risultati\ favorevoli\ ad\ A}{\#\ risultati\ totale}\ per\ spazi\ uniformi!$$

$Disposizioni\ semplici: D_{n,k} = n(n-1) \ldots (n-k+1)$ $Permutazioni: P_n = n!$

$Combinazioni\ semplici: C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ $Disposizioni\ con\ ripetizione: D^*_{n,k} = n^k$

$Probabilità\ condizionata: P(A|M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)}$ $Probabilità\ totale: P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i)$

$Chain\ Rule: P(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n) = P(\varepsilon_1)P(\varepsilon_2|\varepsilon_1) \ldots P(\varepsilon_n|\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1)}$ $Formula\ di\ Bayes: P(A|B) \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

$Indipendenza: P(A|B) = P(A)$ $Spazi\ continui\ non\ uniformi: P\{a \leq x \leq b\} = \int_a^b f(x)dx$

$Prove\ ripetute:$ $1)\ almeno\ un\ successo\ nelle\ prime\ n\ prove: P(A_n) = 1 - (1-p)^n$

$2)\ k\ successi\ nelle\ prime\ n\ prove: P(B_n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$3)\ primo\ successo\ all'i - esima\ prova: P(C) = (1-p)^{i-1}\ p$

$CDF: F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du$ $Delta\ di\ Dirac: \delta(x) = \delta(-x)$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1$

$\boldsymbol{Variabili\ Aleatorie}$

$F_X(x) = P\{X \leq x\}$ $F_X(+\infty) = 1$ $F_X(-\infty) = 0$ $F_X\ non\ decrescente$ $P\{X > x\} = 1 - F_X(x)$

$P\{x_1 < X \leq x_2 = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

$\boldsymbol{Variabili\ Aleatorie\ Continue}$

$V.A. Gaussiana\ o\ Normale\ di\ parametri\ \eta\ e\ \sigma^2$ $X \sim N(\eta, \sigma^2)$

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$ $F_X(x) = 1 - Q\left(\frac{x-\eta}{\sigma}\right)$ $Q_a(x) = \frac{1}{[-(-\sqrt{x^2+b}+x)\cdot a + x]\cdot\sqrt{2\pi e^{x^2}}}$ $a = 0{,}344$ $b = 5{,}334$

$V.A. Esponenziale\ negativa\ di\ parametro\ \lambda$ $X \sim \exp(\lambda)$

$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & se\ x \geq 0 \\ 0 & se\ x < 0 \end{cases} = \lambda e^{-\lambda x} U(x)$ $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & se\ x \geq 0 \\ 0 & se\ x < 0 \end{cases} = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \cdot U(x)$

$V.A. Uniforme\ nell'intervallo [a, b]$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & se\ a \leq x \leq b \\ 0 & altrove \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & se\ a \leq x \leq b \\ 1 & se\ x > b \end{cases}$$

$\boldsymbol{Variabili\ Aleatorie\ Discrete}$

$V.A. Poisson\ di\ parametro\ \lambda > 0$ $X \sim Poisson(\lambda)$ $p_i = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$ $i = 0,1, \ldots$

$V.A. Bernoulli\ di\ parametro\ p \in [0,1]$ $X \sim Bernoulli(p)$ $p_1 = P\{X = 1\} = p$ $p_2 = P\{X = 0\} = 1 - p$

$V.A. Binomiale\ di\ parametri\ n\ e\ p \in [0,1]$ $X \sim Bin(n, p)$ $p_i = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ $i = 0,1, \ldots, n$

$V.A. Geometrica\ di\ parametro\ p \in [0,1]$ $X \sim Geo(p)$ $p_i = p \cdot (1-p)^{i-1}$ $i = 1,2, \ldots, n$

Funzioni di Variabili Aleatorie

Vengono date $g(x)$ *e la PDF di* X, *cioè* $f_X(x)$. *Devo trovare la PDF di* $Y = g\big(X(r)\big)$, *cioè* $f_Y(y)$.

− Caso X continua

0) guardo nel grafico di $g(x)$ *da dove a dove varia la* y; *fuori da questi valori,* $f_Y(y) = 0$.

1) considero i tratti costanti del grafico di $g(x)$; *detto* y_0 *il valore costante, trovo* $P\{Y = \mathrm{y}_0\} = P\{\mathrm{x}_0 < X < \mathrm{x}_1\} = F_X(\mathrm{x}_1) - F_X(\mathrm{x}_0)$ *con* x_0 *e* x_1 *estremi dell'intervallo in cui* $g(x) = \mathrm{y}_0$; *scrivo quindi la* $f_Y(y) = P\{\mathrm{x}_0 < X < \mathrm{x}_1\} \cdot \delta(y - y_0) + c(y)$; *il punto va ripetuto se + tratti costanti.*

2) *nella restante parte del grafico di* $g(x)$, *conto il numero di intersezioni tra una retta orizzontale e* $g(x)$; *ricavo le n soluzioni cioè i valori di* x *in funzione di* y; *calcolo la* $g'(x)$;
$f_Y^c(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \cdots + \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|}$ *dove* $f_X(x_i)$ *è la PDF di partenza calcolata nelle soluzioni* x_i.
Infine, unisco tutto e diventa

$$f_Y(y) = c(y) + P\{\mathrm{x}_0 < X < \mathrm{x}_1\} \cdot \delta(y - y_0) \ldots \quad con\ c(y) = \begin{cases} f_Y^c(y) & se\ y \in codominio\ di\ g(x) \\ 0 & fuori\ dal\ codominio\ di\ g(x) \end{cases}$$

− Caso X discreta

0) disegno il grafico di $g(x)$ *riportando i punti di* X *e trovando i valori* y_i;

1) calcolo la probabilita' in ogni punto come $\{Y = y_i\}$, *tenendo conto che se* y_i *e' immagine di piu' di una* x, *devo sommare le varie probabilita'* $P\{Y = y_i\} = P\{X = x_1\} + P\{X = x_2\}$;

2) la PDF sara' del tipo: $f_Y(y) = P\{Y = y_1\} \cdot \delta(y - y_1) + P\{Y = y_2\} \cdot \delta(y - y_2) \ldots$

Quindi come somma di δ *centrati in* y_i *di peso* $P\{y = y_i\}$ *calcolato nel punto* 1)